2. Елизарова М.А., Малютина А.Н. *Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства*. – LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 121 с.

3. Малютина А.Н. Асанбеков У.К. *Нахождение сферического модуля некоторых семейств кривых* / Матер. межд. конф. Воронежская зимняя матем. школа С.Г. Крейна, 25-31 января 2016 г. // Сб. тр. конф. Воронеж: Научная книга, 2016. – 464 с.

EXAMPLES OF MAPPINGS WITH S-AVERAGED CHARACTERISTIC

U.K. Asanbekov, A.N. Malyutina

In the present paper we give examples showing that, in contrast to mappings with bounded distortion, for mappings with s-averaged characteristic, for which the integrals are bounded, the boundedness of the multiplicity and the degree on compact sets in D, in general, does not hold.

Keywords: boundedness, homogenization, compactness.

УДК 517.982.22+517.982.27

О СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СВОЙСТВОМ КАТО

С.В. Асташкин[1]

1 *astash56@mail.ru*; Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева

Говорят, что банахово пространство X имеет свойство Като, если каждый линейный строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен. Уточняя некоторые недавние результаты, мы доказываем, что этим свойством обладает широкий класс 2-дизъюнктно однородных симметричных пространств.

Ключевые слова: симметричное пространство, компактный оператор, строго сингулярный оператор, 2-дизъюнктно однородная банахова решетка.

Напомним, что линейный оператор, ограниченный из одного банахова пространства в другое, называется *строго сингулярным*, если никакое сужение его на бесконечномерное подпространство не является изоморфизмом. Это понятие было введено Т. Като в связи с решением некоторых проблем теории возмущений фредгольмовых операторов [1].

Как легко видеть, множество всех строго сингулярных операторов образует замкнутый операторный идеал, который содержит идеал компактных операторов. В то же время, согласно классической теореме Ж. Калкина [2] последний является единственным нетривиальным замкнутым идеалом операторов, ограниченных в гильбертовом пространстве. Поэтому в этом случае идеалы строго сингулярных и компактных операторов совпадают [1]. Аналогичный результат верен также для пространств l_p, $1 \le p < \infty$, и c_0 [3], и, как совсем недавно было доказано в работе [4], для некоторого класса 2-дизъюнктно однородных симметричных пространств.

Будем говорить, что банахово пространство X *имеет свойство Като*, если каждый линейный строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен в этом пространстве. Напомним также, что банахова решетка X называется *2-дизъюнктно однородной*, если всякая последовательность попарно дизъюнктных нормированных элементов в X содержит подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису в l_2.

Теорема 1 [4]. *Пусть X — 2-дизъюнктно однородное симметричное пространство на* $[0,1]$ *такое, что $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$. Тогда каждый строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен.*

Цель этой заметки состоит в распространении теоремы 1 на более широкий класс 2-дизъюнктно однородных симметричных пространств.

Напомним некоторые определения из теории симметричных пространств (более полную информацию см. в [5]).

Банахово пространство X измеримых на $[0,1]$ функций называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если 1) оно идеально, т.е. из неравенства $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для п.в. $t \in [0,1]$, где функция x измерима по Лебегу, а $y \in X$, следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$; 2) из *равноизмеримости* функций x и $y \in X$, т.е. равенства

$$\mu(\{t \in [0,1] : |y(t)| > u\}) = \mu(\{t \in [0,1] : |x(t)| > u\}), \ \ u > 0,$$

где $\mu(E)$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}$, вытекает $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

В частности, любая измеримая на $[0,1]$ функция x равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \ge 0 \,:\, \mu(\{s \in [0,1] : |x(s)| > u\}) < t\}, \ \ 0 < t \le 1.$$

Для каждого с.п. X на $[0,1]$ справедливы непрерывные вложения: $L_\infty \subset X \subset L_1$.

Важный и наиболее известный пример симметричных пространств — L_p -пространства, $1 \le p \le \infty$, с обычной нормой. Их естественным обобщением являются пространства Орлича. Пусть $M(t)$ — возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $M(0) = 0$. Пространство Орлича L_M состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций x, таких, что норма

$$\|x\|_{L_M} := \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 M\left(\frac{|x(s)|}{u}\right) ds \le 1\right\}$$

конечна. В частности, если $M(t) = t^p$, $1 \le p < \infty$, получаем L_p-пространства. Замыкание L_∞ в пространстве Орлича, построенном по функции $M(t) = e^{t^2} - 1$, обычно обозначается через G. Хорошо известно (см. [6] или [7, лемма 3.2]), что $x \in G$, если и только если

$$\lim_{t \to 0} \frac{x^*(t)}{\ln^{1/2}(e/t)} = 0.$$

Из последнего соотношения, в частности, легко видеть, что $G \overset{\neq}{\subset} L_p$ для каждого $p < \infty$. Поэтому следующее утверждение является усилением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть X — 2-дизъюнктно однородное симметричное пространство на* $[0,1]$*, $X \supset G$. Тогда каждый строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен.*

Доказательство. Пусть линейный оператор $T : X \to X$ строго сингулярен. Так как пространство X 2-дизъюнктно однородно, то ввиду [4, лемма 2.10] достаточно показать, что множество $T([-x,x])$, где $[-x,x] := \{y \in X : |y| \le x\}$, относительно компактно в X для каждого $x \in X$, $x \ge 0$.

Если T не компактен, то существуют $x \in X$, $x \geq 0$, и последовательность $\{g_n\}$ из порядкового интервала $[-x, x]$ такие, что последовательность $\{Tg_n\}$ не содержит фундаментальных в X подпоследовательностей. Из условия ясно, что в X нет подрешеток, изоморфных l_1 или c_0. Следовательно, X рефлексивно [8, теорема 14.23]. Поэтому, последовательность, образованная разностями элементов некоторой подпоследовательности $\{g_n\}$ слабо сходится к нулю в X. Обозначив ее через $\{f_n\}$, согласно предположению имеем

$$\|Tf_n\|_X \geq \alpha \tag{1}$$

для некоторого $\alpha > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

Так как $|f_n| \leq 2x$ и норма пространства X абсолютно непрерывна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $M > 0$, что

$$\|f_n \chi_{\{|f_n| \geq M\}}\| < \varepsilon \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Заметим, что последовательность $f_n^M := f_n \chi_{\{|f_n| < M\}}$ содержится в интервале $[-M, M]$, и, значит, снова переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{f_n^M\}$ сходится слвбо в X к некоторому $f \in [-M, M]$. Поэтому, если $z_n := f_n^M - f$, то $|z_n| \leq 2M$ и $z_n \xrightarrow{w} 0$ в X. Более того, так как $f_n \xrightarrow{w} 0$ в X, то ввиду (2) $\|f\|_X \leq \varepsilon$. Значит, в силу (1) и (2)

$$\|Tz_n\| \geq \|Tf_n^M\| - \|Tf\| \geq \|Tf_n\| - (\|T(f_n \chi_{\{|f_n| \geq M\}})\| + \|Tf\|) \geq \alpha - 2\|T\|\varepsilon.$$

Отсюда, если ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon < \alpha/(4\|T\|)$, то

$$\|Tz_n\| \geq \frac{\alpha}{2} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Так как $|z_n| \leq 2M$ и $z_n \xrightarrow{w} 0$ в X, то $z_n \xrightarrow{w} 0$ и в L_2. Поэтому согласно [7, теорема 9.2 и следствие 9.1] последовательность $\{z_n\}$ содержит такую подпоследовательность (обозначаем ее по-прежнему через $\{z_n\}$), что для некоторого $C \geq 1$ и любых $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\tau > 0$

$$\mu\Big\{t \in [0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_n z_n(t)\Big| > \tau\Big\} \leq C\mu\Big\{t \in [0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_n r_n(t)\Big| > C^{-1}\tau\Big\},$$

где $r_n(t) := \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$, $0 \leq t \leq 1$, — функции Радемахера. Так как $X \supset G$, то последовательность $\{r_n\}$ эквивалентна в X каноническому базису в l_2 (см., например, [7, теорема 3.1]). Таким образом, в силу предыдущего неравенства, а также [5, следствие 2.4.2]

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_n T z_n\Big\|_X \leq \|T\| \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_n z_n\Big\|_X \leq C^2 \|T\| \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_n r_n\Big\|_X \leq C' \|T\| \|(a_n)\|_{l_2}. \tag{4}$$

Тем самым, применяя [8, предложение 2.1], получим, что $\|Tz_n\|_{L_1} \to 0$ при $n \to \infty$. Сопоставляя это соотношение с (3) в силу классической альтернативы Кадеца-Пелчинского [10] заключаем, что из $\{Tz_n\}$ можно выделить подпоследовательность (оставляем для нее прежнее обозначение), эквивалентную в X некоторой последовательности попарно дизъюнктных функций. Так как X — 2-дизъюнктно однородное пространство, то можно считать, что $\{Tz_n\}$ эквивалентна в X каноническому базису в l_2, т.е. для некоторого $C_1 > 0$

$$C_1^{-1} \|(a_n)\|_{l_2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_n T z_n \right\|_X \leq C_1 \|T\| \|(a_n)\|_{l_2}.$$

Отсюда и из (4) следует, что обе последовательности $\{z_n\}$ и $\{Tz_n\}$ эквивалентны в X каноническому базису в l_2. В итоге оператор T является изоморфизмом на бесконечномерном подпространстве пространства X, порожденном последовательностью $\{z_n\}$. Так как это противоречит строгой сингулярности T, то теорема доказана.

Работа подготовлена в рамках выполнения госзадания Минобрнауки, проект 1.470.2016/1.4, а также частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 17-01-00138.

Литература

1. Kato T. *Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators*// J. d'Analyse Math. – 1958. – V. 6. – P. 273–322.

2. Calkin J. W. *Abstract symmetric boundary conditions*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – V. 45. – № 3. – P. 360–442.

3. Herman R. H. *On the uniqueness of the ideals of compact and strictly singular operators*// Studia Math. – 1967/1968. – V. 29. – P. 161–165.

4. Flores J., Hernández F. L., Semenov E. M., Tradacete P. *Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices*// Israel J. Math. – 2012. – V. 188. – P. 323–352.

5. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

6. Рутицкий Я. Б. *О некоторых классах измеримых функций*// УМН – 1965. – Т. 20. – № 4. – С. 205–208.

7. Асташкин С. В. *Функции Радемахера в симметричных пространствах*// Современная математика. Фундаментальные направления – 2009. – Т. 32. – С. 3–161.

8. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. *Positive Operators.* – Dordrecht: Springer, 2006.

9. Flores J., Hernández F. L., Kalton N. J., Tradacete P. *Characterizations of strictly singular operators on Banach lattices*// J. London Math. Soc. – 2009. – V. 79. – P. 612–630.

10. Kadec M. I., Pe lczyński A. *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p* // Stud. Math. – 1962. – V. 21. – P. 161–176.

ON SYMMETRIC SPACES WITH KATO PROPERTY

S.V. Astashkin

A Banach space X is said to have the Kato property if every linear strictly singular operator in X is compact. Refining some recent results, we prove that there is a wide class of 2-disjointly homogeneous symmetric spaces that possess this property.

Keywords: symmetric space, compact operator, strictly singular operator, 2-disjointly homogeneous Banach lattice.